Республиканская научно-практическая конференция школьников

«Первые шаги в науку»

Направление: Математика

Название работы: Магические квадраты - развлечение или наука?

Автор работы: Бадмагоряева Ирина Сергеевна

Место выполнения работы: п. Цаган Аман, МБОУ «Цаганаманская гимназия»

Руководитель: Улюмджиева Н.Б., учитель математики и информатики

2012 г.

Оглавление

Введение

В незапамятные времена, научившись считать, люди познали меру количества — число. Вглядываясь в сочетания чисел, они с изумлением увидели, что числа имеют какую-то самостоятельную жизнь, удивительную и полную тайны; тайны необъяснимой и поэтому загадочной и многозначительной. Оказалось, что, складывая различные числа, можно получать одно и то же число. Оказалось также, что, располагая числа правильными рядами, один под другим, в случае удачи, можно, складывая числа слева направо и сверху вниз, каждый раз получать одно и то же число. Наконец, кто-то придумал разделить числа линиями так, что каждое число оказалось в отдельной клетке, как птицы в доме птицелова. Так посвященные увидели квадрат, населенный числами, неизвестно что сулящий его владельцу, но, конечно, обладающий магической силой. Таким образом, магические (волшебные) квадраты имеют очень древнюю и богатую историю.

С понятием магического квадрата я познакомилась на уроках математики в 5 классе. Учитель предложил выполнить задание занимательного характера. Заполнить квадрат 3х3 числами по определенным правилам: сумма цифр каждого ряда всегда одна и та же; сумма цифр каждой колонки всегда одна и та же и равна сумме цифр в каждом ряду; сумма цифр, расположенных по диагонали, равна сумме цифр в каждом ряду и в каждой колонке.

Мне стало любопытно, а можно ли составить подобные квадраты большего порядка. Изучая дополнительную литературу, заинтересовалась историей возникновения, способами построения магических квадратов.

Актуальность исследовательской работы – интеллект человека в первую очередь определяется не суммой накопленных им знаний, а высоким уровнем логического мышления. А для успешного решения магического квадрата требуются не столько специальные знания, сколько смекалка и умение подмечать числовые закономерности, развитие любознательности и логического мышления, служит прекрасной «гимнастикой для ума».

Целью моей работы является:

- ✓ изучение истории возникновения магических квадратов.
- ✓ знакомство с различными видами магических квадратов.
- ✓ изучение различных способов построения магических квадратов.

Достижение этой цели возможно путем решения следующих задач:

- ✓ изучить литературу;
- ✓ рассмотреть и исследовать различные магические квадраты;
- ✓ научиться составлять магические квадраты.

Объект исследования - магические квадраты.

1. Развлечение или наука?

Самый первый магический квадрат третьего порядка был известен ещё древним китайцам под названием Ло шу (Приложение 1, рис 1). По преданию, он впервые появился на панцире священной черепахи, выползшей из реки Ло в XXIII веке до нашей эры, но современные китаеведы прослеживают Ло шу лишь до IV века до нашей эры. С того времени и вплоть до X века этот магический квадрат был мистическим символом огромного значения.

Из Китая магические квадраты проникли в Индию (примерно в XI веке), а затем в Японию. В Европу магические квадраты были завезены из Византии в XV веке.

Магический квадрат в девять клеток нашли в трактате испанского еврея, филолога и поэта, Ибн-Эзра или Абен-Эзра, жившего в двенадцатом веке. Он написал много сочинений (до нас не дошедших), в том числе по математике и, в одном из них, о магических квадратах.

Первое сочинение о магических квадратах, дошедшее до наших дней, было написано византийским грамматистом и лексикографом Мануэлем Мосхопулосом. Работу Мосхопулоса относят примерно к 1300 г. Он опубликовал вычисленные им многие магические квадраты с различным числом клеток в основании. Там были и нечетные квадраты, и кратные четырем. Кроме этого, Мосхопулос дал один пример квадрата с шестью клетками в основании и один — с десятью клетками.

В начале XVI в. магический квадрат был увековечен в искусстве. Знаменитый немецкий художник и гравер Альбрехт Дюрер выпустил в 1514 г. гравюру, названную им «Меланхолия» (Приложение 1, рис.2). На заднем плане гравюры, над фигурой крылатой женщины в одежде горожанки, помещен магический квадрат 4x4 клетки. На его нижней строке два средних числа (15 и 14) вместе дают дату выпуска гравюры.

В сочинении немецкого математика Штифеля «Полная арифметика», выпущенном в 1544 г. указано, что в некоторых магических квадратах может быть выделена срединная часть, которая также является магическим квадратом, и окружающая ее рамка, шириной в одну клетку. Это был первый случай анализа математической формы магических квадратов. Век спустя о магических квадратах вновь писали такие крупные математики, как Френикль, Паскаль, Ферма, Арно. Их сочинения положили начало второй, новой жизни магических квадратов.

В 1624 г. в Лионе была напечатана книга Баше (Клода Гаспара Баше де Мезириака). Книга Баше имела название «Задачи забавные и сладостные, кои совершаются в числах». Магические квадраты предстали в ней в новом обличии — математической забавы. Баше дал способы составления магических квадратов, имеющих 10, 11 и 12 клеток в основании. Почти одновременно с Баше над проблемой составления магических квадратов работал известный французский математик Пьер де Ферма, один из создателей теории чисел. Ферма разработал общий способ построения четных магических квадратов.

Знаменитого Блеза Паскаля, физика, математика и философа, каждый учившийся в школе знает как автора «закона Паскаля» (о давлении внутри жидкости). В 1654 г. Паскаль закончил трактат о магических квадратах.

Начиная с Ферма, Френикля и их современников, сочинения о магических квадратах теряют характер математических развлечений. Теория магических квадратов развивается одновременно с развитием общей теории чисел и становится ее ответвлением.

Поистине Эйлер был одним из тех, кто заложил фундамент современной науки. Много он сделал и в теории чисел. Шестая из его записных книжек (примерно 1754—1757 гг.) содержит много заметок по теории чисел. Около 30 страниц уделено магическим квадратам. В 1776 г. Эйлер закончил сочинение «О магических квадратах». В 1782 г. выходит его новая работа «Исследование нового вида магических квадратов». В ней исследовались не числовые, а буквенные квадраты.

Девятнадцатый и начало двадцатого века особенно богаты работами о магических квадратах. Для их анализа используется глубоко разработанная к этому времени теория чисел, в частности, теория сравнений. Применяются десятки хитроумных способов составления магических квадратов. Анализ магических квадратов расширяется и углубляется: рассчитываются магические кубы; анализируются численные линии, плоскости, пространства трех и более измерений. Рассматриваются магические квадраты не с суммами, а с произведениями чисел; квадраты, у которых суммы степеней чисел оказываются равными.

Чем же определяется интерес к магическим квадратам в наше время? На этот вопрос хороший ответ дал Артур Обри, французский ученый. «... Ценность теории определяется не только возможностью ее практического использования, для какого она разработана, но также ее способностью воспитывать наш ум, доставлять ему питание, поддерживающее его жизнь, везде отыскивать новые истины и выяснять их значение без помощи извне. С этой точки зрения изучение магических квадратов, не требуя глубоких знаний, представляет собой превосходную умственную гимнастику, развивающую способность понимать идеи размещения, сочетания, симметрии, классификации, обобщения и т. д. ... Можно сказать, что эта умственная гимнастика включает тонкие теоретические построения, занимаясь которыми упражняется ум...»

2. Магические квадраты: основные понятия

Магический, или волшебный квадрат — это квадратная таблица $n \times n$, заполненная n^2 числами таким образом, что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова.

Если в квадрате равны суммы чисел только в строках и столбцах, то он называется полумагическим.

Нормальным называется магический квадрат, заполненный целыми числами от 1 до n^2. Нормальные магические квадраты существуют для всех порядков $n \geq 1$, за исключением $n = 2$.

Существует 880 магических квадратов четвёртого порядка с учётом поворотов и отражений. Впервые все эти квадраты построил французский математик Френикль де Бесси (Бернар) (1605 – 1675).

Трудолюбие Френикля особенно видно в его сочинении “Общая таблица магических квадратов в четыре”. Френикль был и остаётся единственным математиком, который вычислил и построил все 880 вариантов магических квадратов в 16 клеток. Таблица занимает 43 страницы книги.

Точное число квадратов порядка 5 не было известно до 1973 г., когда полный перебор магических квадратов был осуществлён компьютерной программой, разработанной Р. Шрёппелем, математиком и программистом из “Information International”. Прогон программы на компьютере занимает около 100 часов машинного времени. Окончательное сообщение, написанное М. Билером, появилось в октябре 1975 г. С точностью до поворотов и отражений существует 275 305 224 магических квадратов порядка 5.

Сумма чисел в каждой строке, столбце и на диагоналях называется магической константой, M. Магическая константа нормального волшебного квадрата зависит только от n и определяется формулой $M(n) = \frac{n(n^2-1)}{2}$ (Приложение 2. Таблица 1)

Магическим квадратом чётно-нечётного порядка называется квадрат порядка n=4k+2 (k=1,2,3…), то есть порядок таких квадратов делится на 2 (чётный), но не делится на 4.

Квадратами порядка двойной чётности, или *чётно-чётного порядка*, называются магические квадраты порядка n=4k, k=1, 2, 3…

Магический квадрат называется ассоциативным или симметричным, если сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата, равна $n^2 + 1$. Пример ассоциативного магического квадрата четвертого порядка – Приложение 2 рис.1.

Обычные диагонали в магическом квадрате называют главными.

Разломанная диагональ – это диагональ, параллельная главной диагонали и проходящая тоже через n ячеек квадрата.

Поскольку главных диагоналей две, то разломанные диагонали тоже будут двух направлений. Приложение 2. рис.2.

К магическому квадрату порядка n присоединяется его копия. В полученном таким образом прямоугольнике размером nx2n проводятся прямые, параллельные главным диагоналям магического квадрата и проходящие через n клеток.

Дьявольский магический квадрат — магический квадрат, в котором также с магической константой совпадают суммы чисел по ломаным диагоналям в обоих направлениях. Такие квадраты называются еще пандиагональными. Приложение 3. рис.1

Если пандиагональный квадрат еще и ассоциативный, то он носит название идеальный. Пример идеального магического квадрата – Приложение 3. рис. 2

3. Некоторые способы построения магических квадратов

3.1. Построение магических квадратов нечетного порядка

3.1.1. Индийский (сиамский) метод

Индийский метод составления магических квадратов (иногда называется также *сиамским*) является, по-видимому, самым древним алгоритмом построения магических квадратов произвольного нечётного порядка.

Правила для метода очень простые. Число 1 вписывается в середину верхней строки. Далее числа вписываются в естественном порядке по восходящей диагонали. Как только число выходит за пределы квадрата, сразу перенесём его в эквивалентную ячейку внутри квадрата. Дойдя до числа kn, то есть до числа кратного порядку квадрата, пишем следующее число снизу от только что записанного числа и снова записываем числа по восходящей диагонали.

Эквивалентная ячейка: если число, оказавшееся за пределами квадрата, находится справа от него, надо записать его в том же горизонтальном ряду, сместив на **n** ячеек влево. Если число оказалось над квадратом, надо записать его в том же вертикальном ряду, сместив на n ячеек вниз.

По индийскому методу я построила магический квадрат 11-го порядка (Приложение 4. рис.1) , магическая константа равна: $M(n)=\frac{n(n^2+1)}{2}=\frac{11(11^2+1)}{2}=\frac{11*122}{2}=671$

Построенный мной квадрат является ассоциативным. $n^2+1=11^2+1=121+1=122$.

1) 49 + 73 = 122; 2) 48 + 74 = 122; 3) 36 + 86 = 122; 4) 60 + 62 = 122. (Приложение 4. рис. 1).

Построенный магический квадрат не является пандиагональным, так как сумма чисел не по всем разломанным диагоналям равна магической константе квадрата – 671. Приложение 4. рис. 2, рис.3.

3.1.2. Метод террас (Баше)

Этот прием построения магического квадрата был предложен в XVII веке французским математиком Баше.

Этим методом я построила магический квадрат тоже 11 порядка. С четырёх сторон к исходному квадрату 11х11 добавила террасы так, чтобы получился зубчатый квадрат того же порядка, что и исходный. В полученной фигуре расположила числа от 1 до 121 в естественном порядке косыми (диагональными) рядами снизу вверх. Числа в террасах, не попавшие в квадрат, переместила как бы вместе с террасами внутрь него так, чтобы они примкнули к противоположным сторонам квадрата. Приложение 5. рис.1. Получила вот такой магический квадрат 11 порядка.

И этот построенный мной квадрат является ассоциативным (Приложение 5. рис.2).

$n^2 + 1 = 11^2 + 1 = 121 + 1 = 122.$

111+11=122 121+1=122 60+62=122 50+72=122

3.1.3. Метод Москопула (метод коня)

В методе византийского учёного Москопула, как в индийском методе, указывается некоторый алгоритм последовательного заполнения клеток основного квадрата числами от **1** до $\mathbf{n^2}$. Порядок заполнения клеток по этому способу такой же, как порядок обегания шахматной доски конём, двигающимся вверх и направо. Поэтому метод Москопула иногда называется также методом коня.

Правила для метода Москопула очень просты.

1. Если порядок квадрата n не кратен 3, то число 1 вписывается в любую ячейку квадрата; если порядок квадрата n кратен 3, то число 1 вписывается в середину нижней строки.
2. Последовательно вписываем числа в естественном порядке, двигаясь ходом шахматного коня вверх и направо. Как только число выходит за пределы квадрата, переносим его в эквивалентную ячейку внутри квадрата.
3. Если ячейка, в которую должно быть вписано число **z+1**, уже занята другим числом, то вписываем число **z+1** в ячейку, расположенную в том же вертикальном ряду, что и ячейка с числом **z**, но находящуюся на четыре ячейки выше.

Данным способом построю еще один магический квадрат 11 порядка (Приложение 6. рис. 1).

Дальше проверила построенный магический квадрат на ассоциативность (Приложение 6. рис. 2).

Сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата 61, равна одному и тому же числу 122. 122 = 121 + 1= 11^2 + 1= n^2 +1. А это означает, что построенный мной магический квадрат – ассоциативен.

Будет ли магический квадрат являться пандиагональным**.** Для этого найду сумму чисел по всем разломанным диагоналям. Если суммы будут равны магической константе квадрата, то мой квадрат будет пандиагональным**.** Проверка сумм чисел всех разломанных диагоналей показала, что построенный квадрат действительно пандиагональный (Приложение 6. рис. 3). Сумма чисел по всем разломанным диагоналям равна магической константе 671

А так как квадрат одновременно ассоциативный и пандиагональный, то он является идеальным.

3.2. Методы построения магических квадратов четно-четного порядка

3.2.1. Метод квадратных рамок

Для построения магического квадрата методом квадратных рамок на матричное поле (с изображённым на нём исходным квадратом n x n) наносятся квадратные рамки со стороной в два раза меньшего размера, чем сторона исходного квадрата с шагом в одну клетку по диагонали (или две клетки по строкам и столбцам). Затем по линиям рамок расставляются числа от 1 до n^2 в естественном порядке, начиная с левой верхней ячейки исходного квадрата, причём первая рамка обходится по часовой стрелке, вторая рамка начинается с верхней свободной, справа ячейки квадрата и обходится против часовой стрелки и т. д. Числа, не попавшие в квадрат, переносятся внутрь его так, чтобы они примкнули к противолежащим сторонам квадрата.

Следуя, указаниям я построила магический квадрат 16 порядка. Его магическая константа равна $M(n) = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{16(16^2+1)}{2} = \frac{16*257}{2} = 2056$. Этапы построения находятся в Приложении 7. рис.1 и рис.2.

Проверим квадрат на ассоциативность: $n^2 + 1 = 16^2 + 1 = 257$

233+24=257, 25+232=257. Значит квадрат ассоциативен. Проверка квадрата на пандиагональность показала, что не все суммы по разломанным диагоналям равны магической константе, а значит квадрат не пандиагональный.

3.2.2. Метод окаймленных квадратов

Для построения магического квадрата порядка n, в качестве исходного квадрата в методе окаймленных квадратов берётся любой магический квадрат порядка n – 2. Я решила данным методом построить магический квадрат 12 порядка.

1. Для этого в качестве исходного взяла готовый магический квадрат 10 порядка. Приложение 8. рис.1.
2. Увеличила все элементы этого магического квадрата на величину **2(n - 1) = 2*(12-1) = 2*11 = 22** и поместила полученный нетрадиционный магический квадрат в матрицу 12 x 12 так, чтобы с каждой стороны квадрата был свободный столбец (свободная строка). Приложение 8. рис.2.
3. Для заполнения клеток верхней строки таблицы n x n (в моем случае 12 x 12) использовала числа {4i – 3, 4i, d – 4i + 2, d – 4i + 1}, где m = [n/2], M = [m/2], d=n*n + 1, i = 1, 2, …, M. n = 12; m=12/2=6; M=6/2=3; d=12*12+1 = 145.

i	4i – 3	4i	d – 4i + 2	d – 4i + 1
1	1	4	143	142
2	5	8	139	138
3	9	12	135	134

У меня значение m не кратно четырем, поэтому в крайнюю левую клетку я поместила число m + 3 = 6 + 3 =9, а в крайнюю правую клетку – число 4. Остальные из указанных выше чисел расставила в свободных клетках верхней строки произвольным образом.

4. Пусть в верхней левой угловой клетке таблицы n*n находится число i, а в верхней правой угловой клетке – число j, тогда в нижнюю левую клетку таблицы помещаем число d – j, а в нижнюю правую клетку - число d – i. Согласно этому правилу получила – d – j = 145 – 4 = 141; d – i= 145 – 9 = 136.
5. В оставшиеся свободными клетки левого столбца таблицы n*n поместила (произвольным образом) числа {2m + 2i – 1, d – 2m – 2i}, где i = 1, 2, …, m-1.

i	2m + 2i – 1	d – 2m – 2i
1	13	131
2	15	129
3	17	127
4	19	125
5	21	123

6. Оставшиеся свободными клетки нижней строки и правого столбца заполнила так, чтобы расположенные друг против друга числа были взаимно дополнительными.

Вот такой получился у меня магический квадрат 12 порядка (Приложение 8. рис.3.)

Магический квадрат получился у меня не ассоциативным, не выполняется условие:

71 + 76 = 147;   77 + 66 = 143

Магический квадрат также оказался не пандиагональный (Приложение 9).

3.3. Методы построения магических квадратов четно-нечетного порядка

3.3.1. Метод четырех квадратов

Данным методом построила магический квадрат 14 порядка. Этот квадрат четно-нечетного порядка, так как 14 делится на 2, но не делится на 4.

Сначала построим 1-ый магический квадрат нечётного порядка $m = 7$. Для его построения я выбрала метод террас. Получился вот такой магический квадрат 7 порядка (Приложение 9. рис.2).

2-ой магический квадрат получила прибавлением к числам 1-ого квадрата числа $2m^2=98$; 3-ий квадрат – прибавлением числа $3m^2=147$; 4-ый квадрат – прибавлением числа $m^2=49$. Приложение 10. рис.1.

Как видно из рисунка построенный квадрат не является магическим, суммы по строкам не равны магической константе = 1379.

Необходимо переставить столбцы. Число переставляемых столбцов вычисляем по формуле $(m - 3) = 4$. На рисунке переставляемые столбцы закрашены одинаковым цветом. Приложение 10. рис. 2.

Полученный магический квадрат не является ассоциативным и пандиагональный. Но обладает интересным свойством: угловые квадраты порядка $m = n/2$ можно повернуть на 180 градусов, получится новый магический квадрат. (Приложение 11. рис.2).

Заключение

Изучая книги по занимательной математике, я часто встречала задачи с магическим квадратом. И это позволило мне сделать вывод, что составление магических, или волшебных квадратов – весьма распространенный вид математических развлечений. Но прочитав книгу Ефима Яковлевича Гуревича «Тайна древнего талисмана», я поняла ошибочность своего первоначального вывода. Составление магических квадратов является не только забавой. С древних времён до наших дней математики и даже люди других профессий занимаются составлением магических квадратов, разработкой методов построения, классификацией магических квадратов, изучением их свойств.

Особое место в теории магических квадратов занимает разработка методов построения. За несколько веков составлено множество самых разных алгоритмов. Я узнала, что универсального способа заполнения магических квадратов нет, а способ заполнения магического квадрата, зависит от его порядка (нечетного, четно – четного, четно-нечетного порядков). Рассмотрела методы построения магического квадрата в зависимости от порядка. Мною были построены и исследованы магические квадраты 7, 11, 12, 14, и 16 порядков.
Знакомясь с литературой по интересующему вопросу, я увидела, что магические квадраты также исследуют с помощью методов высшей алгебры и операционного исчисления. Эти методы мне пока не понятны, в силу моих знаний по математике. Но мои исследования не заканчиваются, так как считаю, что осталось много неохваченных вопросов, которые я не смогла рассмотреть в рамках данной работы.

Материалы моего исследования могут пригодиться при проведении внеклассных мероприятий с целью развития и расширения познавательного кругозора, развития логического мышления.

«Я не знаю ничего более прекрасного в арифметике, чем эти числа, называемые некоторыми планетными, а другими - магическими», - писал о них известный французский математик, один из создателей теории чисел Пьер де Ферма. Привлекающий естественной красотой, наполненные внутренней гармонией, доступные, но по прежнему непостижимые, скрывающиеся за кажущейся простой множество тайн... Магические квадраты - удивительные представители воображаемого мира чисел.

Литература

1. И. Я. Депман, Н.Я. Виленкин. За страницами учебника математики. Москва. Просвещение. 1989г.
2. Ф.Ф. Нагибин, Е.С. Канин. Математическая шкатулка. Москва. «Просвещение» 1984 год.
3. Перельман Я.И. Занимательные задачи и опыты. М.: Детская литература, 1972
4. Постников М.М. Магические квадраты. М.: Наука, 1964
5. Е.Я. Гуревич. Тайна древнего талисмана. – М.: Наука, 1969
6. Н.В. Макарова. Волшебный мир магических квадратов. – Саратов, 2009

Список использованных информационных ресурсов

1. http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/MAGICHESKI_KVADRAT.html
2. http://ru.wikipedia.org/
3. http://www.klassikpoez.narod.ru/glavnaja.htm
4. http://blog.arbuz.uz/2007/09/11/postroenie-magicheskih-kvadratov/