Автор - **Лиджаев Данзан Александрович**
ученик 7 класса

Lidzhaev Danthan Aleksandrovich

Руководитель – Улюмджиева Наталья Бадмаевна, тел. 927 646 8667,
e-mail: nataslav08@mail.ru

Республика Калмыкия Юстинский район п. Цаган Аман пер. Школьный, 6
МБОУ «Цаганаманская гимназия» ,
тел. 84744 9 13 45, e-mail: zagangimn@yandex.ru

Контактный телефон:

Адрес: Республика Калмыкия Юстинский район п. Цаган Аман

ул. Пушкина 8/1

e-mail: danzan_1@mail.ru

Международный конкурс «Математика и проектирование»
Номинация: Наука математика

Тема: Магические квадраты

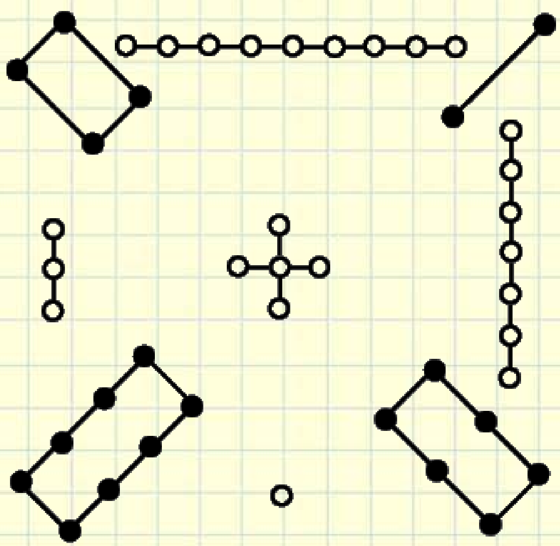
Составление магических, или волшебных квадратов – старинный и еще сейчас весьма распространенный вид математических развлечений. Но составление магических квадратов является не только забавой. Теорию их разрабатывали многие выдающиеся ученые – математики.

Цель работы: **изучить магические квадраты и его свойства**

Задачи:

- ✓**познакомиться с историей магических квадратов,**
- ✓**выяснить виды магических квадратов и способы их заполнения;**

В китайской древней книге «Же-ким» (книга перестановок) приводится легенда о том, что император Ню, живший 4000 лет назад, увидел на берегу реки черепаху. На ее панцире был изображен рисунок из белых и черных кружков. Если заменить каждую фигуру числом, показывающим, сколько в ней кружков, получится такая таблица:



а

4	9	2
3	5	7
8	1	6

б

У этой таблицы есть замечательное свойство. Сложим числа первого столбца: 4+3+8=15. Тот же результат получится при сложении чисел второго, а также первого столбцов. Он же получится при сложении чисел любой из строк. Мало этого, тот же ответ 15 получается, если сложить числа каждой из двух диагоналей: 4+5+6=8+5+2=15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рисунок китайцы назвали «Ло шу» и стали считать его магическим символом и употреблять при заклинаниях. Поэтому сейчас любую квадратную таблицу, составленную из чисел и обладающую таким свойством, называют магическим квадратом.

Магическим квадратом n-ого порядка называется квадрат размерами nxn со вписанными в него натуральными числами от 1 до n^2 так, что сумма их по всем горизонталям, вертикалям и диагоналям квадрата равна одному и тому же числу.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

- ✓ Слово **«порядок»** означает в данном случае число клеток на одной стороне квадрата.
- ✓ Квадрат 3×3 имеет третий порядок, а квадрат 5×5 – пятый.
- ✓ Магический квадрат второго порядка не существует.

Существует 8

магических квадратов третьего порядка

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	3	4
1	5	9
6	4	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Существует 880 магических квадратов четвёртого порядка с учётом поворотов и отражений. Впервые все эти квадраты построил французский математик Френикль де Бесси (Бернар) (1605 – 1675).

Трудолюбие Френикля особенно видно в его сочинении “Общая таблица магических квадратов в четыре”. Френикль был и остаётся единственным математиком, который вычислил и построил все 880 вариантов магических квадратов в 16 клеток. Таблица занимает 43 страницы книги.

Точное число квадратов порядка 5 не было известно до 1973 г., когда полный перебор магических квадратов был осуществлён компьютерной программой, разработанной Р. Шрёппелем, математиком и программистом из “Information International”. Прогон программы на компьютере занимает около 100 часов машинного времени. Окончательное сообщение, написанное М. Билером, появилось в октябре 1975 г. С точностью до поворотов и отражений существует 275 305 224 магических квадратов порядка 5

Нормальным называется магический квадрат, заполненный целыми числами от 1 до n^2.

Сумма чисел в каждой строке, столбце и на диагоналях называется **магической константой.** Магическая константа нормального волшебного квадрата зависит только от n и определяется формулой

$$M(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Первые значения магических констант

Порядок *n*	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
M (n)	**15**	**34**	**65**	**111**	**175**	**260**	**369**	**505**	**671**	**870**	**1105**

Магический квадрат называется **ассоциативным** или **симметричным**, если сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата, равна $n^2 + 1$.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$6+11=4^2+1$

Обычные диагонали в магическом квадрате называют **главными**.

Разломанная диагональ – это диагональ, параллельная главной диагонали и проходящая тоже через **n ячеек квадрата.**

Поскольку главных диагоналей две, то разломанные диагонали тоже будут двух направлений.

1	14	7	12	1	14	7	12
15	4	9	6	15	4	9	6
10	5	16	3	10	5	16	3
8	11	2	13	8	11	2	13

Пояснение: к магическому квадрату порядка n присоединяется его копия. В полученном таким образом прямоугольнике размером nx2n проводятся прямые, параллельные главным диагоналям магического квадрата и проходящие через n клеток.

Дьявольский магический квадрат — магический квадрат, в котором также с магической константой совпадают суммы чисел по ломаным диагоналям в обоих направлениях. Такие квадраты называются еще **пандиагональными**.

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

1	8	11	14
12	13	2	7
6	3	16	9
15	10	5	4

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

Если пандиагональный квадрат еще и ассоциативный, то он носит название <u>идеальный</u>. Пример идеального магического квадрата:

21	32	70	26	28	69	22	36	65
40	81	2	39	77	7	44	73	6
62	10	51	58	18	47	57	14	52
66	23	34	71	19	33	67	27	29
4	45	74	3	41	79	8	37	78
53	55	15	49	63	11	48	59	16
30	68	25	35	64	24	31	72	20
76	9	38	75	5	43	80	1	42
17	46	60	13	54	56	12	50	61

Квадрат, найденный в Кхаджурахо, (Индия)

Кхаджурахо.
Храм Паршванатха.

Самый ранний уникальный магический квадрат обнаружен в надписи XI века в индийском городе Кхаджурахо:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Это первый магический квадрат, относящийся к разновидности так называемых «дьявольских» квадратов

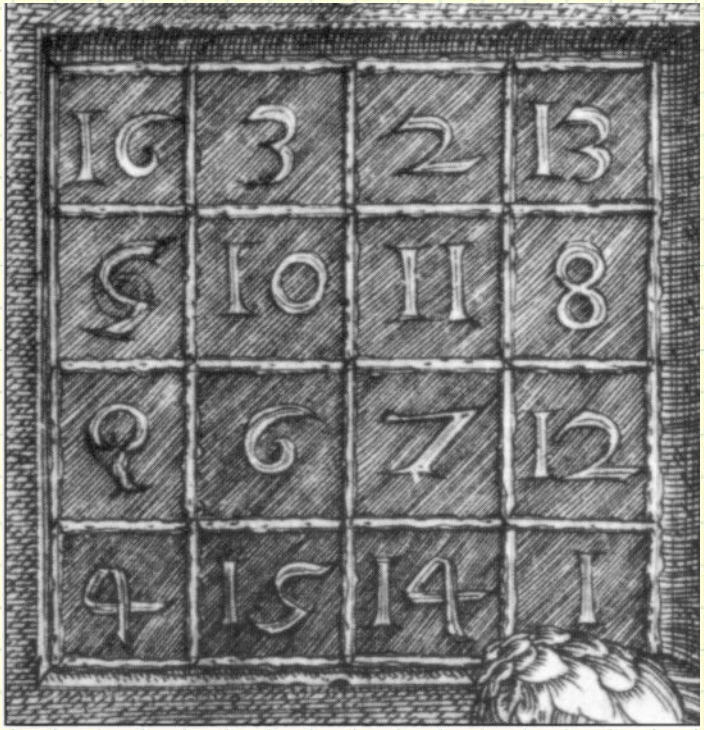
Магический квадрат Ян Хуэя (Китай)

В 13 в. математик Ян Хуэй занялся проблемой методов построения магических квадратов. Его исследования были потом продолжены другими китайскими математиками. Ян Хуэй рассматривал магические квадраты не только третьего, но и больших порядков. Некоторые из его квадратов были достаточно сложны, однако он всегда давал правила для их построения. Он сумел построить магический квадрат шестого порядка, причем последний оказался почти ассоциативным (в нем только две пары центрально противолежащих чисел не дают сумму 37)

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

Квадрат Альбрехта Дюрера

Магический квадрат 4x4, изображённый на гравюре Альбрехта Дюрера «Меланхолия», считается самым ранним в европейском искусстве.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

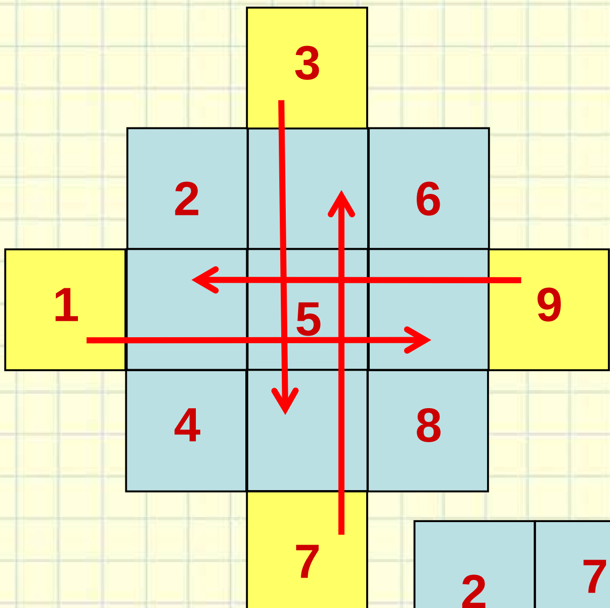
Два средних числа в нижнем ряду указывают дату создания картины – 1514 год. Сумма чисел на любой горизонтали, вертикали и диагонали равна 34. Эта сумма также встречается во всех угловых квадратах 2x2, в центральном квадрате, в квадрате из угловых клеток, в квадратах, построенных «ходом коня», в прямоугольниках, образованных парами средних клеток на противоположных сторонах.

10+11+6+7=34; 16+13+4+1=34;
2+8+9+15=34 и 3+5+12+14=34;
3+2+15+14=34 и 5+8+9+12=34.

Некоторые способы построения магических квадратов

Способ Баше (террас)

Этот прием построения магического квадрата был предложен в XVII веке французским математиком Баше.



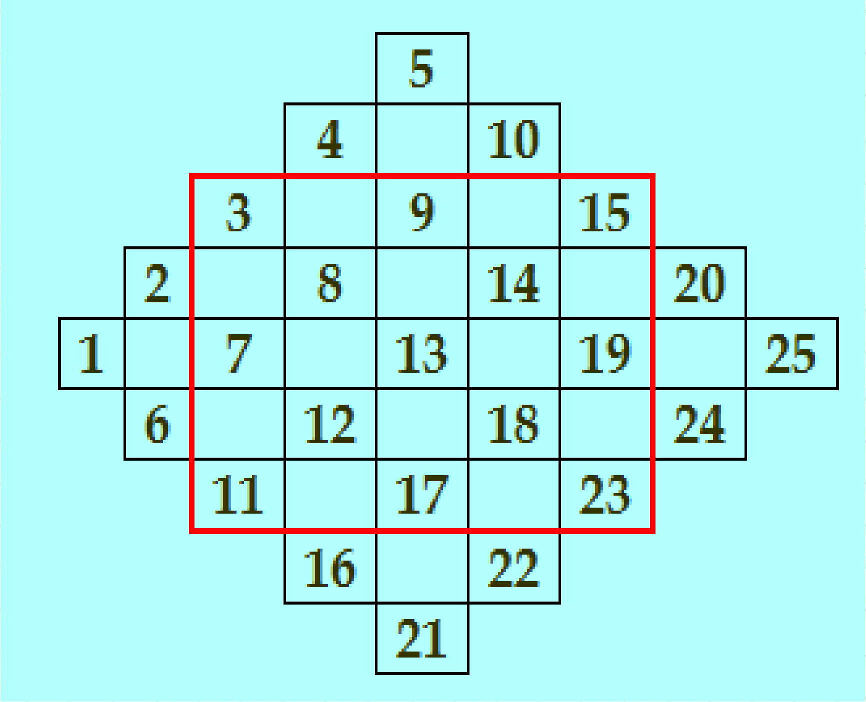
Начертив квадрат, разграфленный на девять клеток, пишем по порядку числа от 1 до 9, располагая их косыми рядами по три в ряд, как показано на изображение.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Числа, стоящие вне квадрата, вписываем внутрь его так, чтобы они примкнули к противолежащим сторонам квадрата (оставаясь в тех же столбцах или строках, что и раньше). В результате получаем квадрат.

Построим магический квадрат

пятого порядка



3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Индийский способ

Этот способ придуман, как полагают, в Индии еще до начала нашего летоисчисления. Его суть заключается в 6-ти правилах. Приведём пример построения 49-ти клеточного квадрата.

1. В середине верхней строки пишут 1, а в самом низу соседнего справа столбца – 2.
2. Следующие числа пишут по порядку в диагональном направлении вправо вверх.
3. Дойдя до правого края квадрата, переходят к крайней левой клетке ближайшей вышележащей строки.
4. Дойдя до верхнего края квадрата, переходят к самой нижней клетке соседнего справа столбца. Дойдя до правой верхней угловой клетки, переходят к левой нижней.
5. Дойдя до уже занятой клетки, переходят к клетке, лежащей непосредственно под последней заполненной клеткой.
6. Если последняя заполненная клетка находится в нижнем ряду квадрата, переходят к самой верхней клетке в том же столбце.

Индийский способ

30	29	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Способ поворотов и отражений

Для любого магического квадрата можно построить новые магические квадраты при помощи поворотов на 90, 180,270 градусов. Так же путём осевой симметрии, центральной симметрии из данного квадрата можно получить новые магические квадраты.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	3	4
1	5	9
6	4	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Метод Москопула (ход конем)

В методе византийского учёного Москопула указывается некоторый алгоритм последовательного заполнения клеток основного квадрата числами от 1 до n^2. Порядок заполнения клеток по этому способу такой же, как порядок обегания шахматной доски конём, двигающимся вверх и направо. Поэтому метод Москопула иногда называется также *методом коня*.

1. **Если порядок квадрата n не кратен 3, то число 1 вписывается в любую ячейку квадрата; если порядок квадрата n кратен 3, то число 1 вписывается в середину нижней строки.**

2.Последовательно вписываем числа в естественном порядке, двигаясь ходом шахматного коня вверх и направо. Как только число выходит за пределы квадрата, перенесём его в эквивалентную ячейку внутри квадрата.

3. Если ячейка, в которую должно быть вписано число z+1, уже занята другим числом, то вписываем число z+1 в ячейку, расположенную в том же вертикальном ряду, что и ячейка с числом z, но находящуюся на четыре ячейки выше.

Метод Москопула (ход конем)

			21		
	6				
	12	25	8	16	4
	18		14	22	10
11	24	7	20	3	
17	5	13	21	9	17
23	6	19	2	15	23
4	12	25	8	16	
10	18	1	14	22	

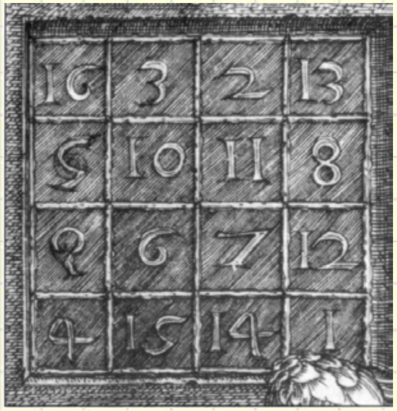
Построение магического квадрата 5-ого порядка методом Москопула

Заключение

Магические (волшебные) квадраты имеют очень древнюю и богатую историю. Самый первый магический квадрат третьего порядка был известен ещё древним китайцам под названием Ло шу.

Из Китая магические квадраты проникли в Индию (примерно в XI веке), а затем в Японию. В Европу магические квадраты были завезены из Византии в XV веке. Магический квадрат четвёртого порядка так очаровал немецкого художника Альбрехта Дюрера, что он поместил его на своей знаменитой гравюре “Меланхолия”. Этот квадрат стал называться квадратом Дюрера. В средние века магические квадраты связывали с астрологией, каждой планете соответствовал свой магический квадрат. Считалось, что магические квадраты обладают мистическими свойствами.

Альбрехт Дюрер



С древних времён до наших дней математики и даже люди других профессий занимаются составлением магических квадратов, разработкой методов построения, классификацией магических квадратов, изучением их свойств. Большой интерес вызывал вопрос об общем количестве магических квадратов разных порядков.

Особое место в теории магических квадратов занимает разработка методов построения. За несколько веков составлено множество самых разных алгоритмов. Универсального способа заполнения магических квадратов нет. Способ заполнения магического квадрата, зависит от его порядка

О пользе занятий магическими квадратами очень хорошо сказал французский учёный А. Обри:

“Составление магических квадратов представляет собой превосходную умственную гимнастику, развивающую способность понимать идеи размещения, сочетания, симметрии, классификации, обобщения и т. д.”

Список использованных информационных ресурсов

1. http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/MAGICHESKI_KVADRAT.html
2. http://ru.wikipedia.org/
3. http://www.klassikpoez.narod.ru/glavnaja.htm

Литература

1.И. Я. Депман, Н.Я. Виленкин. За страницами учебника математики. Москва. Просвещение. 1989г.

2. Ф.Ф. Нагибин, Е.С. Канин. Математическая шкатулка. Москва. «Просвещение» 1984 год.

3. Перельман Я.И. Занимательные задачи и опыты. М.: Детская литература, 1972

4. Постников М.М. Магические квадраты. М.: Наука, 1964