

# «Математика и проектирование»

Математика и искусство

## Выдающиеся люди математического изобразительного искусства

Выполнила: Хан Юлия Андреевна,  
ученица 10 «а» класса  
Цаганаманской гимназии

Руководитель: Улюмджиева Наталья Бадмаевна  
учитель математики и информатики  
Цаганаманской гимназии

Россия, 359300, Республика Калмыкия, Юстинский район, с. Цаган Аман,  
переулок Школьный, 6, Цаганаманская гимназия, zagangimn@yandex.ru

# Содержание

## Введение

### 1. Математика «северного» Леонардо

#### 1.1. Биография Альбрехта Дюрера

#### 1.2. Математические работы А. Дюрера

#### 1.3. Математика в картинах Дюрера

### 2. Математическое искусство Морица Эшера

#### 2.1. Биография Морица Эшера

#### 2.2. Математика в картинах Эшера

## Заключение

## Библиография

# Введение

Творчество ряда всемирно известных художников, таких как Леонардо да Винчи, Дюрер, Дали, Эшер, проникнуто математикой и тесно связано с геометрическими построениями. Об этом можно судить по геометрической правильности изображения пространства и подчеркнутой соразмерности фигур и предметов в их работах.



Их интерес к геометрии был намного глубже, чем этого требовали профессиональные запросы мыслящего художника своего времени. С помощью числовых отношений и геометрических построений они стремились добиться совершенства в художественном изображении.



Великий немецкий художник Дюрер прославился как блестящий рисовальщик, график и живописец, и как глубокий мыслитель. Математика занимала в жизни Дюрера весьма важное место. Сочетание природного таланта, необыкновенного трудолюбия и стремления к знаниям определило широту интересов и высокую степень мастерства великого художника, графика, ученого немецкого Возрождения, которого называли «северным Леонардо».



Портрет молодой венецианки (1505)



ЧЕТЫРЕ ВСАДНИКА АПОКАЛИПСИСА (1498)



Большой кусок дерна (1503-05)

*«Все творчество Дюрера проникнуто математикой. Об этом говорит не только геометрическая правильность изображения пространства и подчеркнутая соразмерность фигур и предметов на его картинах, гравюрах и рисунках, но и рассуждения в его печатных трудах, дневниках и письмах.»*

*Г. И. Матвиевская*



# Биография Альбрехта Дюрера

Сын серебряных дел мастера, выходца из Венгрии. Учился сначала у отца, затем у нюрнбергского живописца и гравера Михаэля Вольгемута (1486-90). Обязательные для получения звания мастера «годы странствий» (1490-94) провел в городах Верхнего Рейна (Базель, Кольмар, Страсбург), где вошел в круг гуманистов и книгопечатников.



В Кольмаре, не застав в живых М. Шонгауэра, у которого намеревался совершенствоваться в технике гравюры на металле, изучал его работы, общаясь с его сыновьями, также художниками. Вернувшись в 1494 в Нюрнберг, женился на Агнесе Фрей и открыл собственную мастерскую. Вскоре отправился в новое путешествие, на этот раз в Северную Италию (1494-95; Венеция и Падуя). В 1505-07 вновь был в Венеции.

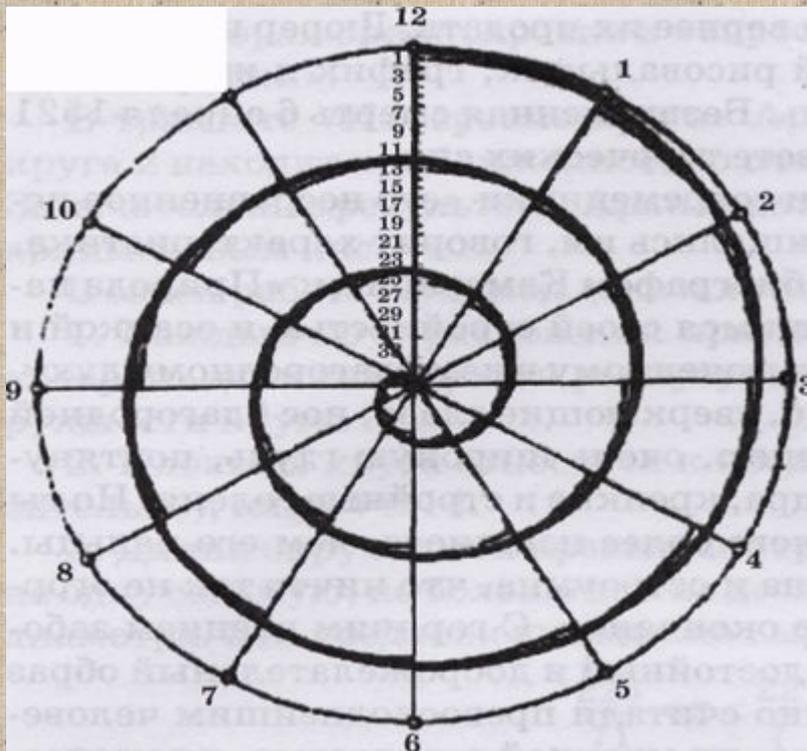
Познакомившись в 1512 с императором Максимилианом I, видимо, тогда же начал на него работать (вплоть до его смерти в 1519). В 1520-21 посетил Нидерланды (Антверпен, Брюссель, Брюгге, Гент, Малин и другие города). Работал в Нюрнберге.



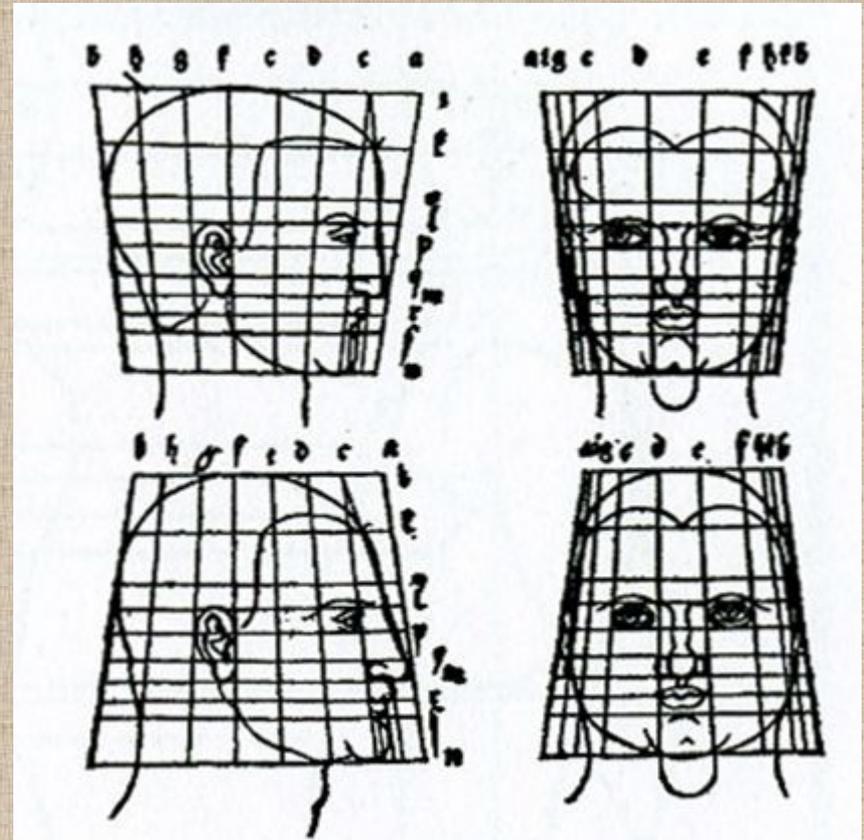




Вклад Дюрера в теорию перспективы особенно велик. Его по праву считают предшественником создателя начертательной геометрии Гаспара Монжа, работавшего в конце XVIII в. Для построения совершенных изображений Дюрер широко использовал геометрические преобразования



Чертеж, иллюстрирующий метод Дюрера, применяемый для построения спиралей



Искажение пропорций головы

Следующее из его крупных научных сочинений **"Руководство к измерению с помощью циркуля и линейки"** явилось в свое время **первым учебником геометрии в Германии**. Значение его было особенно велико в связи с тем, что оно написано на разговорном немецком языке и предназначалось для читателей, не знакомых с латынью. А.Дюрер был одним из создателей немецкой геометрической терминологии.

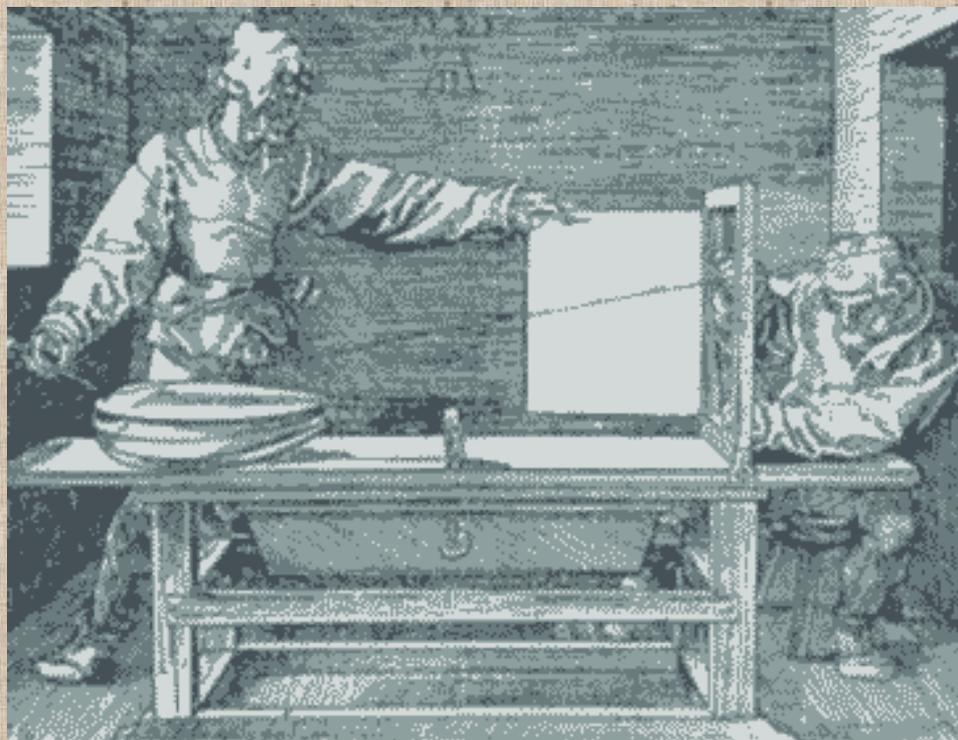
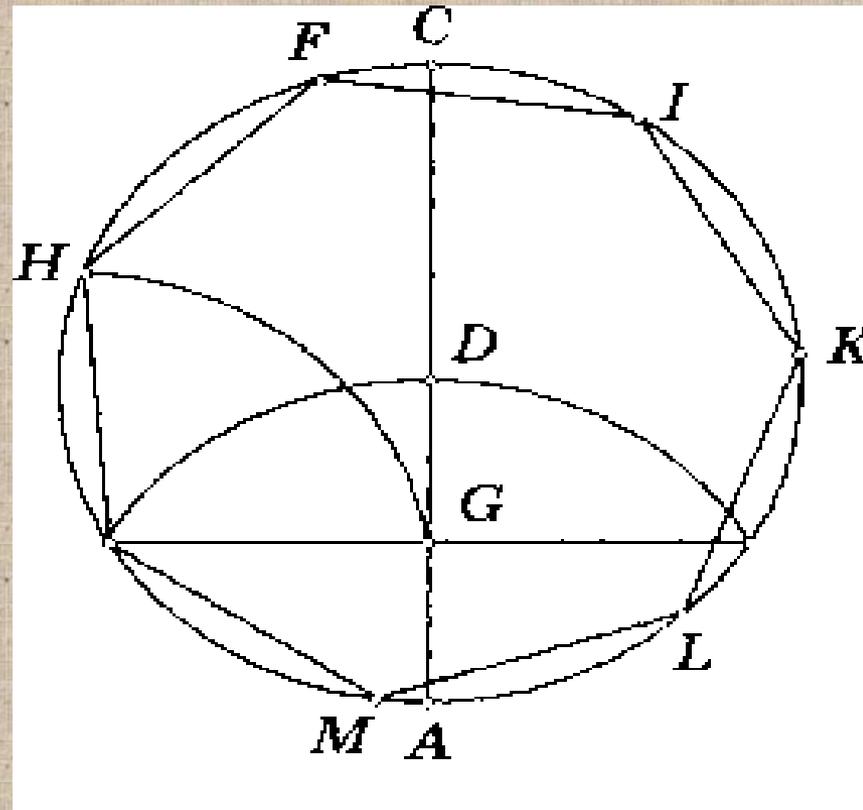


Иллюстрация из трактата "Руководство к измерению циркулем и линейкой" (1525)

«Руководство...» состоит из четырех книг, в которых рассматриваются вопросы геометрии, интересовавшие А.Дюрера как художника-теоретика и исследователя-математика. В этих книгах даются определения геометрических фигур: параллельных прямых, угла, спирали, приводятся методы построения правильных многоугольников.



Особый интерес у Дюрера вызывали вопросы, связанные с построением правильных многоугольников, поскольку такие построения широко используются на практике. В своих трудах он описывает способы построения циркулем и линейкой правильных семи- и девяти- угольников.

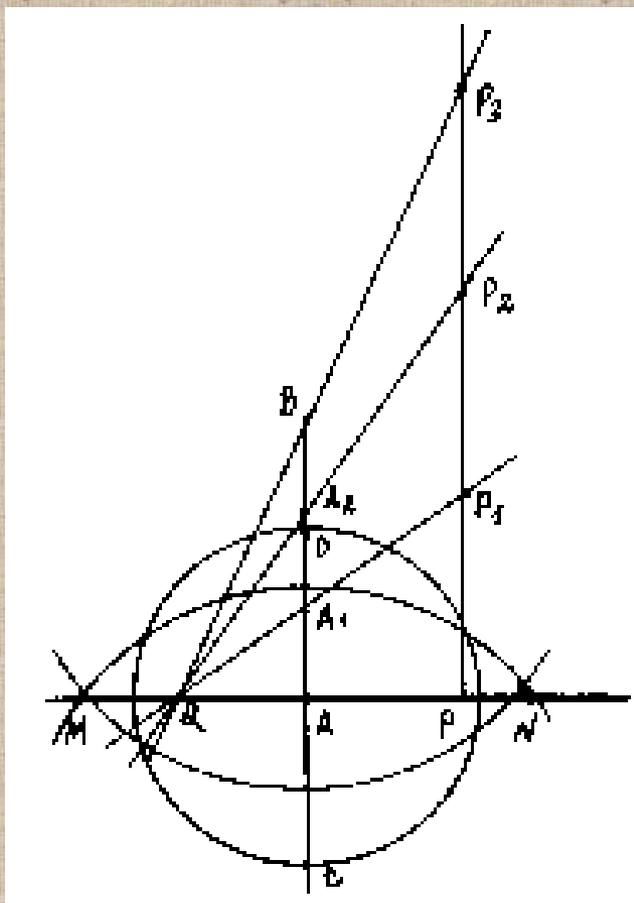


Построение правильного семиугольника





**Пример решения задачи деления отрезка на три равные части**  
**Задача1.** Дан отрезок  $AB$ . С помощью циркуля и линейки разделите его на три равные части



**Построение.**

- 1) проведем отрезок  $AB$ ;
- 2) из точки  $A$  проведем окружность произвольного радиуса, которая пересекает отрезок  $AB$  в точке  $D$ , а его продолжение за точку  $A$  - в точке  $C$ ;
- 3) из точек  $C$  и  $D$  проводим окружности радиусом большим  $CD$ , пересекающиеся в точках  $M$  и  $N$ , через полученные точки проводим прямую  $MN$ , которая перпендикулярна прямой  $AB$ ;
- 4) возьмем произвольную точку  $P$  прямой  $MN$  и проведем через нее прямую  $PK$ , перпендикулярную прямой  $MN$ ; прямые  $AB$  и  $PK$  будут параллельны;
- 5) от начала  $P$  луча  $PM$  отложим три равных отрезка  $PP_1, P_1P_2, P_2P_3$ , каждый из которых меньше отрезка  $AB$ ;
- 6) через точки  $P_3$  и  $B$  проведем прямую, которая пересечет прямую  $MN$  в точке  $Q$ ;
- 7) проводим прямые  $P_2Q$  и  $P_1Q$ , которые и разделят отрезок  $AB$  на три равные части,  $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$ . Нетрудно доказать, используя подобие треугольников, что построенные части отрезка  $AB$  действительно равны.

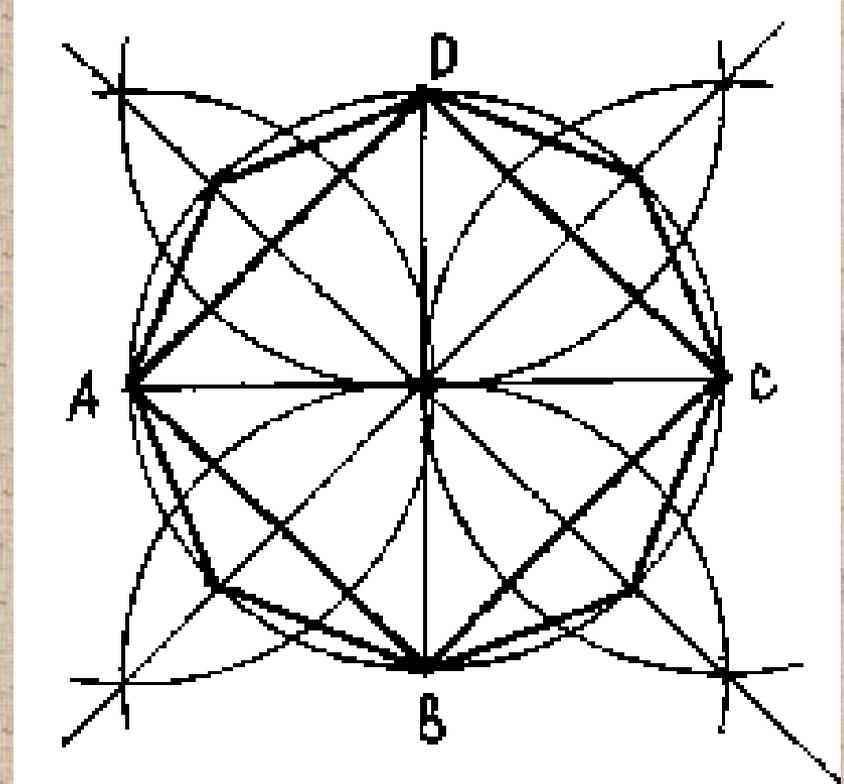


## Пример решения задачи построением правильного восьмиугольника

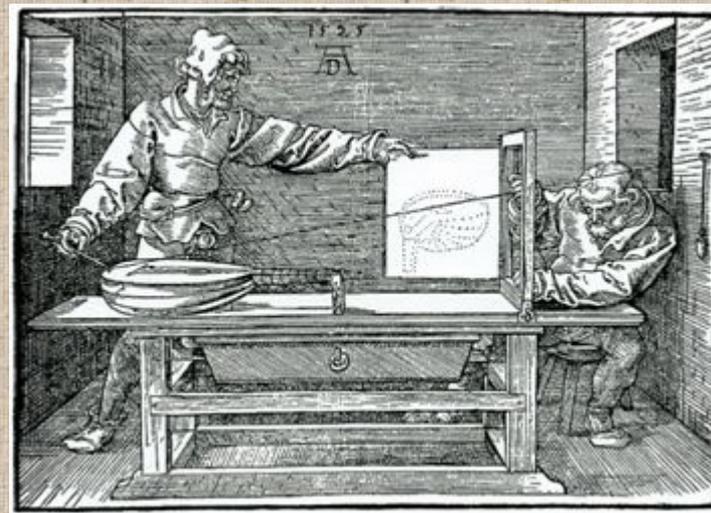
**Задача 2.** Дан квадрат  $ABCD$ . Постройте с помощью циркуля и линейки, используя данный квадрат, правильный восьмиугольник.

### Построение

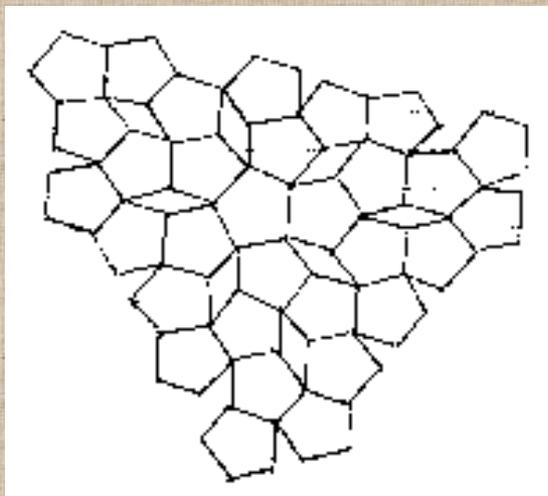
1. Опишем около данного квадрата окружность, центр которой - точка пересечения диагоналей квадрата
2. Каждую из дуг  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  с помощью циркуля и линейки разделим пополам;
3. Соединим полученные точки деления и вершины квадрата, в результате получим правильный восьмиугольник, вписанный в окружность.



в «Руководстве...» приводятся геометрические методы для решения прикладных задач, которые использовались архитекторами и строителями. А.Дюрер объясняет действия с измерительными приборами, рассматривает конструкцию солнечных часов. Он приводит руководство к черчению художественно исполненных букв латинского и готического немецкого алфавитов.



Художник, рисующий лютню (рисование с помощью перекрещивающихся нитей), 131 x 188 мм



Четвертую книгу «Руководства...» знаменитый художник посвятил чрезвычайно интересовавшей его как художника геометрической теории перспективы. В книге им описаны правильные многогранники, даются изображения разверток этих тел. Дюрер проявил себя первоклассным геометром, доказательством тому служит пример паркета



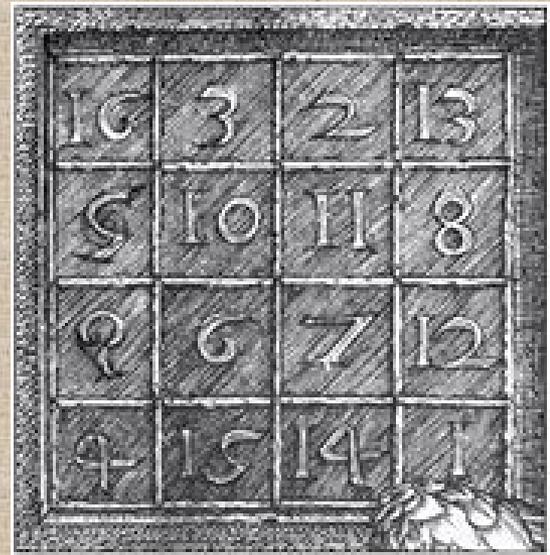


Сотни страниц исписаны искусствоведами в попытках объяснить значения символов, использованных Дюрером. Один из них, Э. Пановски, считает: «Дюрер представил "Меланхолию" как один из четырех темпераментов и как одно из семи свободных искусств — геометрию. Он воплощает в ней тип художника Ренессанса, который ценит практическое умение, не избегает математической теории, и который, чувствуя себя причастным божественному вдохновению, одновременно страдает от всего человеческого несовершенства и ограниченности. Таким образом, это в некотором смысле духовный автопортрет Дюрера». Под свободными искусствами в средние века понимали семь наук, составляющих основу школьного образования — грамматику, риторику, геометрию, диалектику, арифметику, астрономию и музыку.

Каждая из деталей гравюры имеет глубокий символический смысл. Женщина, изображенная на гравюре, окружена различными предметами: часы, циркуль, линейка, весы. Сколько надежд связывал А.Дюрер с измерениями и вычислениями. Как часто ему казалось, что именно они откроют тайну прекрасного. И вот теперь женщина, погруженная в печальное раздумье, держит циркуль рассеянно и небрежно, а линейка брошена и валяется у ее ног. Может, этим автор хотел показать разочарование в циркуле и линейке как ключах к познанию красоты? И не надежды ли на скрытые тайные свойства чисел привели сюда магический квадрат?



**А.Дюрер, как и многие его современники, верил в способность магических средств открыть человеку истину, скрытую для обычного знания. Может быть, поэтому на одной из его гравюр "Меланхолия" мы видим магический квадрат.**

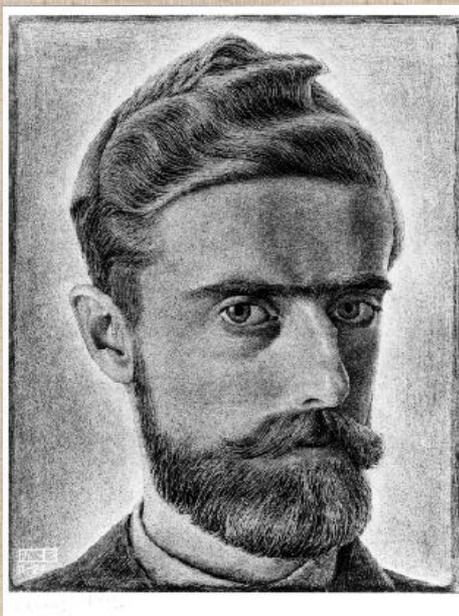


**Сумма чисел в столбце и каждой строчке одинакова и равна 34. Такое же число получается, если найти сумму чисел, расположенных по главным диагоналям квадрата. Сумма чисел, расположенных в одномерных угловых квадратах, и сумма чисел в угловых двумерных квадратах также равны 34. Получить такой квадрат можно очень просто. Для этого нужно взять квадрат, разделить его на 16 клеток и в каждую из них вписать по порядку числа от 1 до 16, а затем поменять местами числа, расположенные на главных диагоналях симметрично относительно центра, и магический квадрат построен. А.Дюрер переставил у своего квадрата два средних столбца (и это не повлияло на свойства квадрата) так, что числа в двух средних клетках нижней строки стали указывать дату создания гравюры - 1514 г.**



# Математическое искусство

## Морица Эшера



**«Я часто ощущаю большую близость и математикам, чем к коллегам – художникам».**

**Мориц Эшер**



# Биография Морица Эшера

Среди современных художников в жанре «математического искусства» наиболее успешно выступает голландский художник Мориц Эшер.

Его литографии, гравюры на дереве, меццо - тиино можно увидеть в кабинетах математиков и других учёных во всех уголках мира. Некоторые из его работ носят жутковатый, сюрреалистический оттенок, но произведения Эшера - это не фантазмагор Сальвадора Дали или Рене Магритта, а тонкие философские и математические наблюдения.

Мориц Эшер родился в 1898 г. в Голландии. В юности учился в Школе архитектуры и орнамента в Гавлеме. В течение 10 лет жил в Риме. Покинув Италию в 1934 г., Эшер провел 2 года в Швейцарии, 5 лет в Брюсселе и затем поселился в голландской городке Барне, где жил до конца жизни. Обширную коллекцию работ Эшера собрал внук президента Теодора Рузвельта инженер Корнелнус Ван Шаак Рузвельт.



# Математика в картинах Эшера

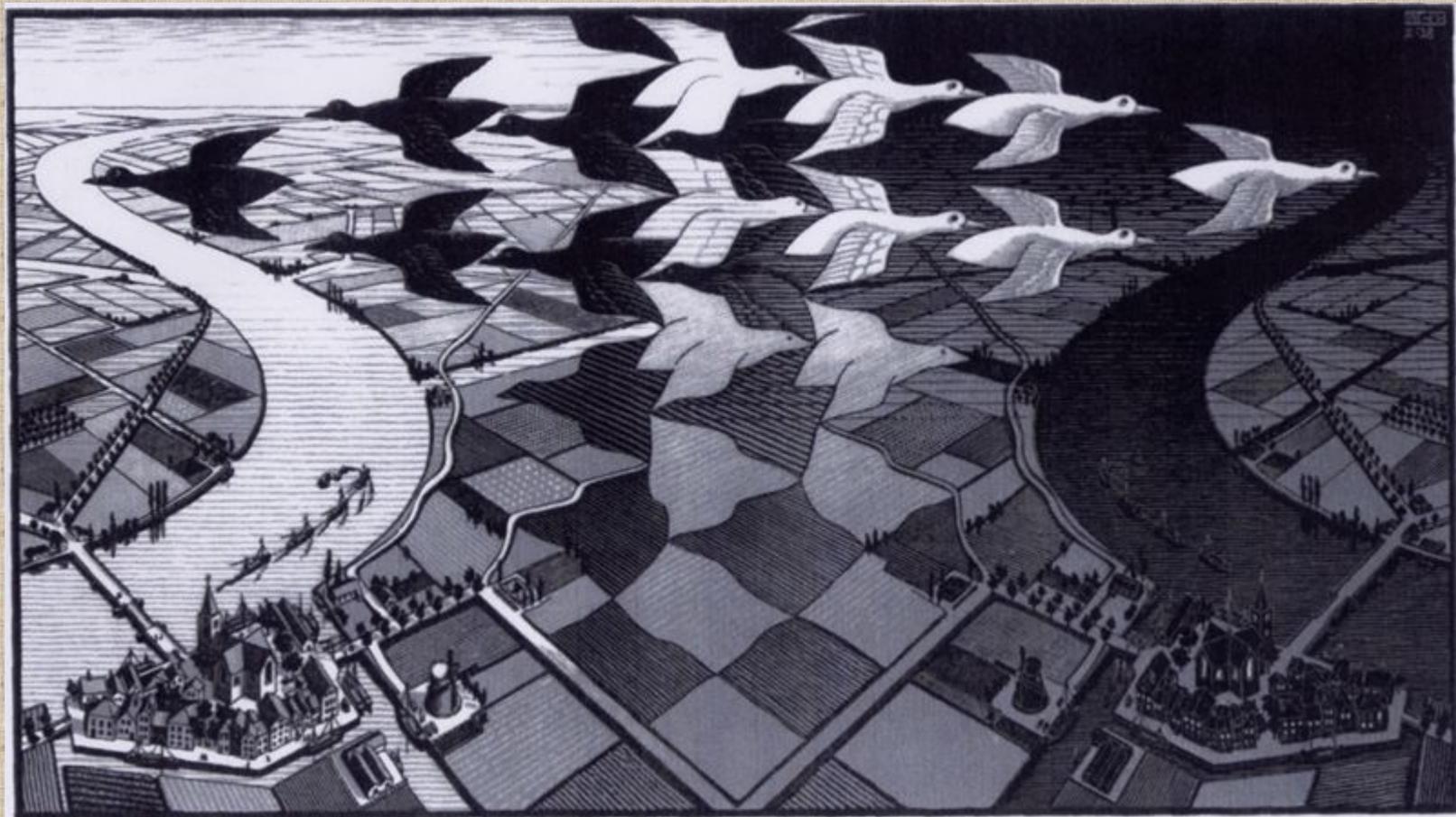
Среди кристаллографов наибольшей известности пользуются хитроумные орнаменты Эшера, заполняющие всю плоскость. Орнаменты на стенах Альгамбр свидетельствуют о том, сколь искусны были испанский Марвы в изобретении узоров, состоящих из периодических повторений конгруэнтных фигур. Но мусульманская религия запрещала мавританским мастерам использовать в орнаментах изображения живых существ. Разбивая плоскость на хитроумные комбинации контуров птиц, рыб, пресмыкающихся, млекопитающих и человеческих фигур, Эшер умело включает свои орнаменты в необычайные, подчас озадачивающие неожиданные решениями композиции.



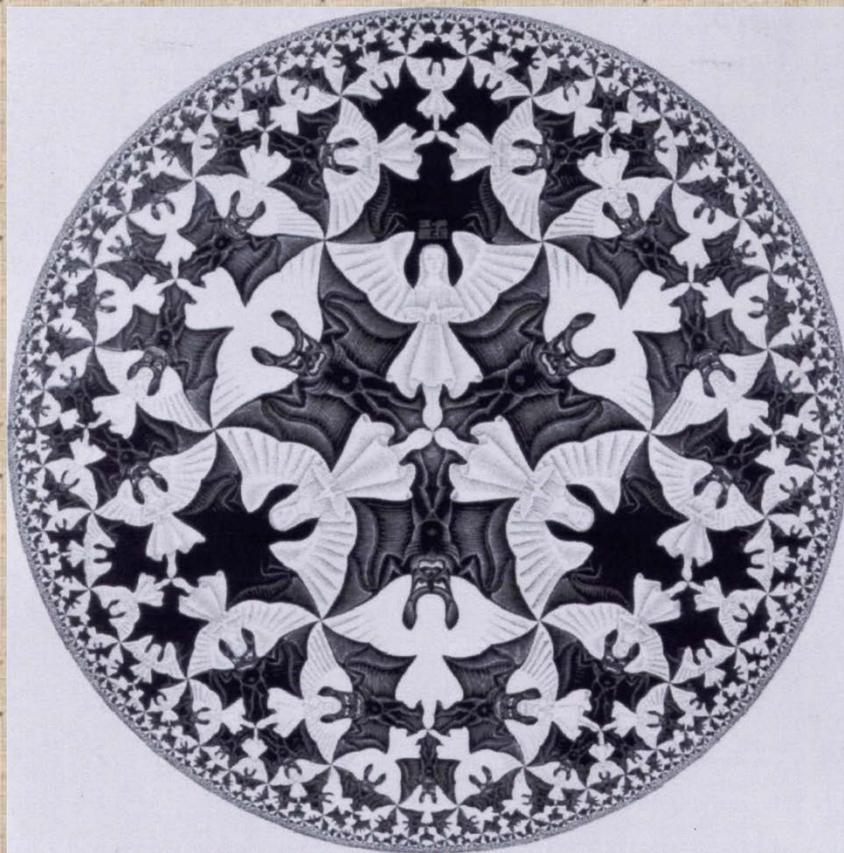
На литографии «Рептилии» маленькое чудовище выползает из шестиугольной мозаики, чтоб начать краткий цикл трехмерного бытия. Достигнув вышей точки, - взобравшись на додекаэдр, рептилия вновь возвращается в безжизненную плоскость.



На гравюре «День и ночь» правая и левая части композиции не только зеркально симметричны, но и как бы служат своеобразными «негативами» одна другой. По мере того как наш взгляд перемещается снизу вверх, квадраты полей превращаются в белых птиц, летящих в нот и в черных птиц, летящих на фоне светлого дневного небо.

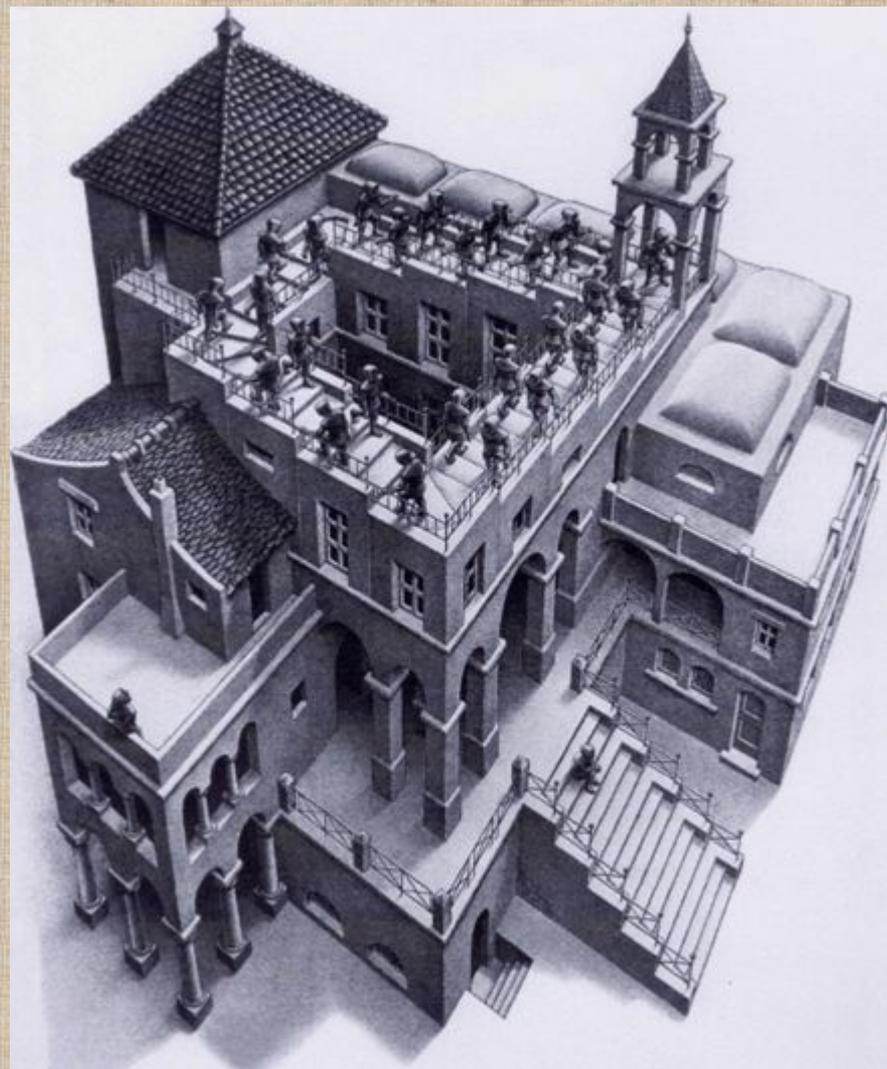


На круглой гравюре «Рай и ад» фигура ангелов и дьяволов, вплотную примыкая друг другу заполняют плоскость. При движении от центра гравюры к ее краю фигуры уменьшаются, превращаясь в бесконечное множество фигурок, невидимых невооруженным глазом на самом краю. Этот замечательный орнамент основан на вполне математической идее – известной евклидовой модели неевклидовой гиперболической плоскости, придуманной Анри Пуанкаре.



Работами совсем иной категории являются игры с законами перспективы, создание «невозможных» конфигурации. Обратите внимание на схематическое изображение куба на литографии «Бельведер» (на листе бумаги, лежащем на выложенной квадратными плитами полу). Точки, в которых скрещиваются ребра куба, отмечены кружками. На основе куба в руках у сидящего мальчика ребра скрещиваются самым невероятным (и не реализуемым в трехмерном пространстве) образом. Множество «невозможных» деталей имеется и в самом бельведере. Юноша, взобравшийся на самый верх приставной лестницы, висит снаружи бельведера, хотя основание лестницы находится внутри его. Человек в темнице, вероятно, сошел с ума, пытаясь разобраться в противоречиях причудливого мира, в котором он оказался по воле художника.

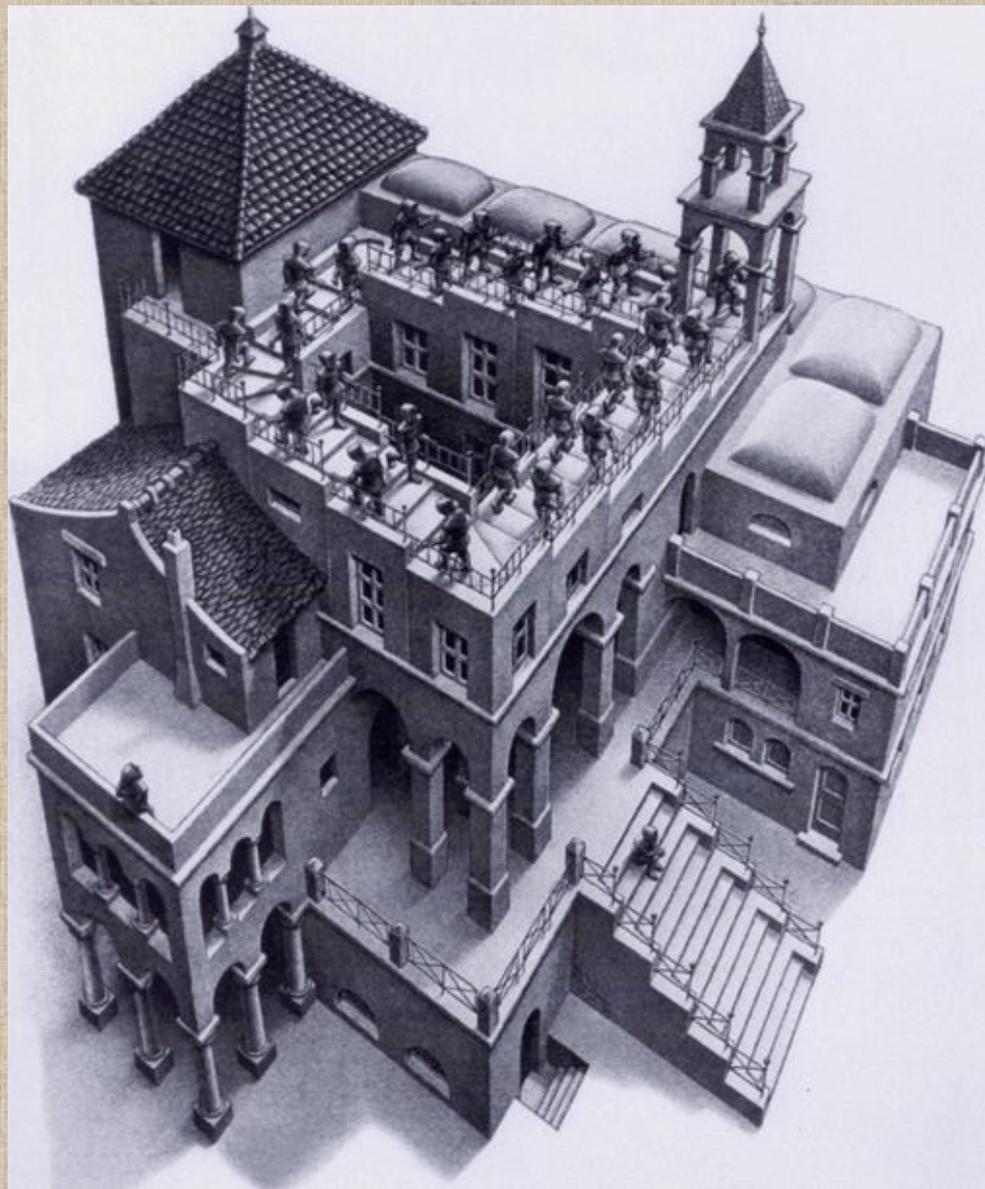




В литографии «Восхождение и спуск» использована одна из удивительных («невозможных») фигур, впервые обнаруженных английским генетиком Л. С. Пенроузом и его сыном математиком Р. Пенроузом. Монахи неизвестного ордена совершают ежедневный ритуал – нескончаемую прогулку по круговой галерее на крыше своего монастыря. При этом те, кто идет по «невозможной» лестнице во внешней ряду, все время вбираются вверх, а те, кто шествуют во внутреннем ряду, сталь же неуклонно спускаются вниз.



**«И то, и другое, хотя и не лишено смысла, одинаково бесцельно, - комментирует Эшер. - Два мыслящих индивидуума (один – на балконе, другой – на лестнице) отказываются принимать участие в «упражнении духа». Их кажется, будто они постигли истину глубже чем их собратья, но рано или поздно они поймут ошибочность своего неконформизма»**



Во многих картинах Эшера запечатлено чувство восхищения формами правильных и полуправильных тел.

«Среди окружающего нас нередко хаотического мира, - писал Эшер, - они служат непревзойденным по своей выразительности символом извечного стремления человека к гармонии и порядку . В то же время их совершенство вызывает у нас ощущение собственной беспомощности. Правильные многогранники совершенно лишены человеческого элемента. Их нельзя считать изобретениями человеческого разума, ибо они существовали в земной коре в виде кристаллов задолго до того, как на сцене появилось человечество. Что же касается сферических форм, то разве сама Вселенная не состоит из сфер?»



ТЕТРАЭДР



КУБ (ГЕКСАЭДР)



ОКТАЭДР



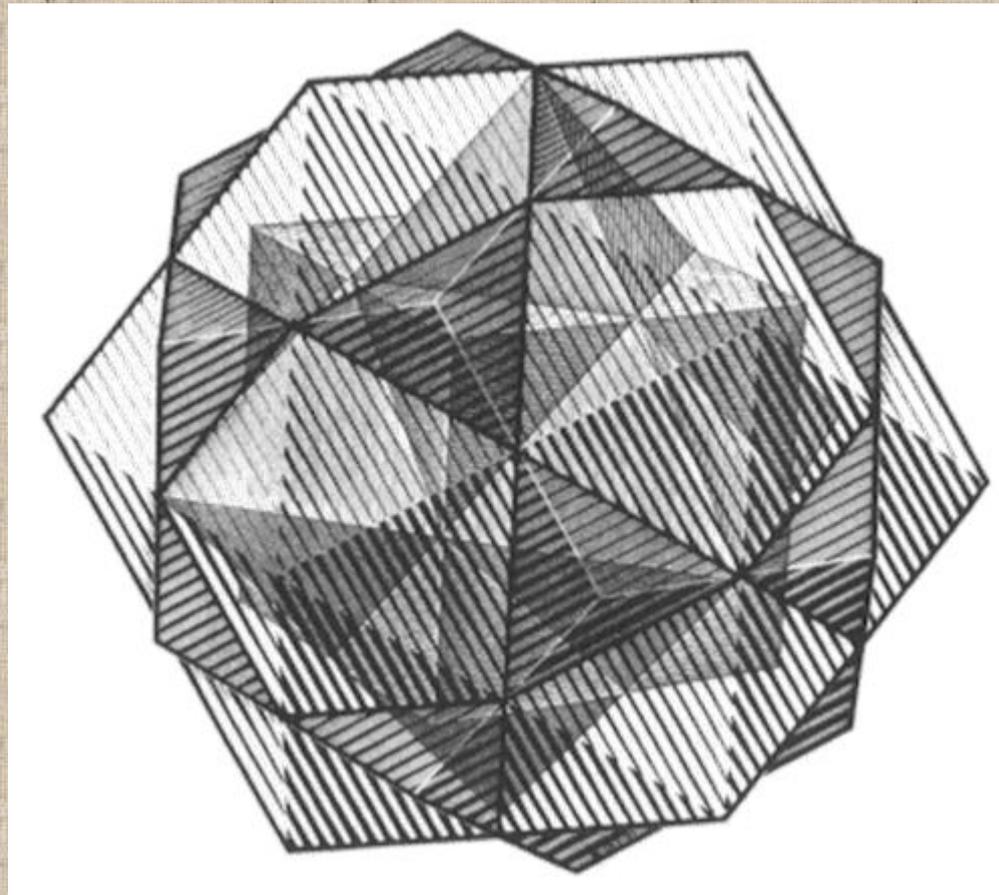
ДОДЕКАЭДР



ИКОСАЭДР



На гравюре "Четыре тела" Эшер изобразил пересечение основных правильных многогранников, расположенных на одной оси симметрии, кроме этого многогранники выглядят полупрозрачными, и сквозь любой из них можно увидеть остальные.



На литографии Эшера «Порядок и хаос» изображен малый звездчатый додекаэдр — один из четырех звездчатых многогранников Кеплера — Пуансо, образующих вместе с пятью платоновыми телами девять правильных многогранников. Малый звездчатый додекаэдр (вместе с еще одним звездчатым многогранником) был впервые открыт Кеплером, который назвал его «ежом».

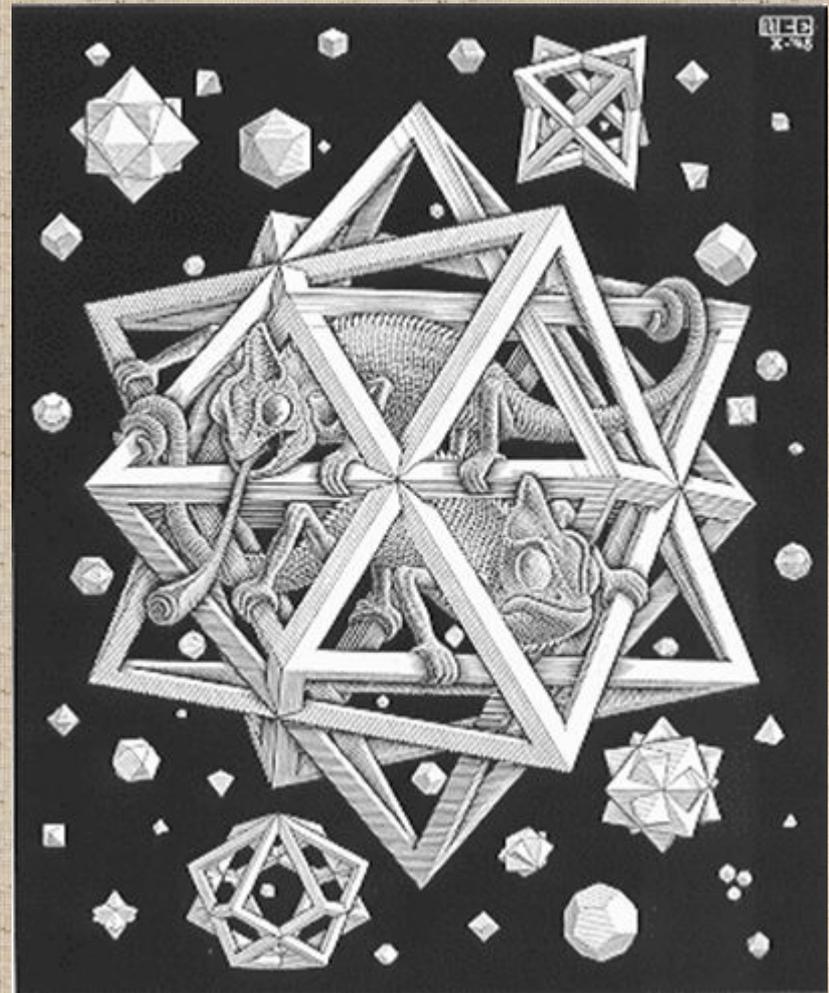
Грани звездчатого додекаэдра, как и грани платоновых тел, имеют форму одинаковых правильных многоугольников, только не выпуклых, а звездчатых. Грани малого звездчатого додекаэдра “проникают” одна сквозь другую.

Малый звездчатый додекаэдр (вместе с еще одним звездчатым многогранником) был впервые открыт Кеплером, который назвал его «ежом». Рисунок «ежа» был опубликован на страницах кеплеровской «Гармонии мира» — грандиозного трактата, в котором гармонические пропорции, открытые великим астрономом в формах геометрических фигур, переносились на движение небесных тел. В “Гармонии мира” Кеплер впервые сформулировал свой знаменитый третий закон движения планет.

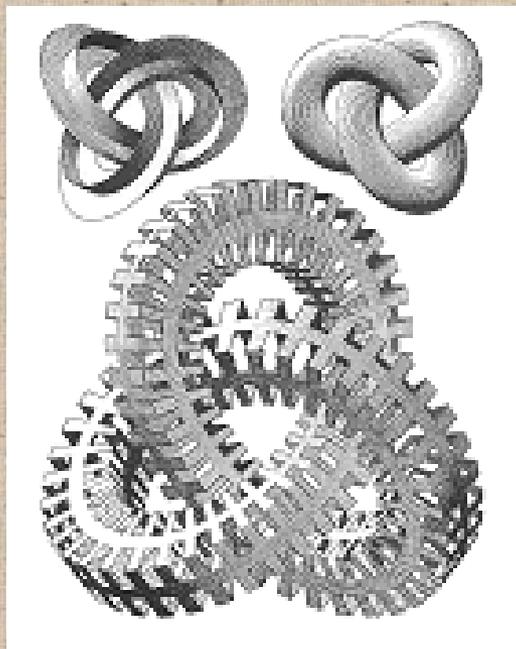




Фигуры, полученные объединением правильных многогранников, можно встретить во многих работах Эшера. Наиболее интересной среди них является гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров. Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутрь центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить нам восприятие всей фигуры. Таким образом нам необходимо отвлечься от привычного восприятия картины и попытаться взглянуть на нее свежим взором, чтобы представить ее целиком. Этот аспект данной картины является еще одним предметом восхищения математиков творчеством Эшера.



Увлечение Эшера причудливыми формами тел, изучаемых в топологии, нашло отражение в ряде его более поздних работ. На гравюре «Узлы» два зеркально симметричных узла, известных под названием «трилистник». Левый узел «сделан» из двух полосок, пересекающихся под прямым углом. Перед тем как концы такой крестообразной полоски были соединены, всю двойную полоску перекрутили на пол оборота. Большой узел, изображенный под двумя трилистниками, «выполнен» из ажурной трубки четырехугольного сечения, перекрученной на четверть оборота перед склеиванием ее концов: муравей, ползущий по центральной дорожке, опишет четыре полных круга, прежде чем вернется в исходную точку.



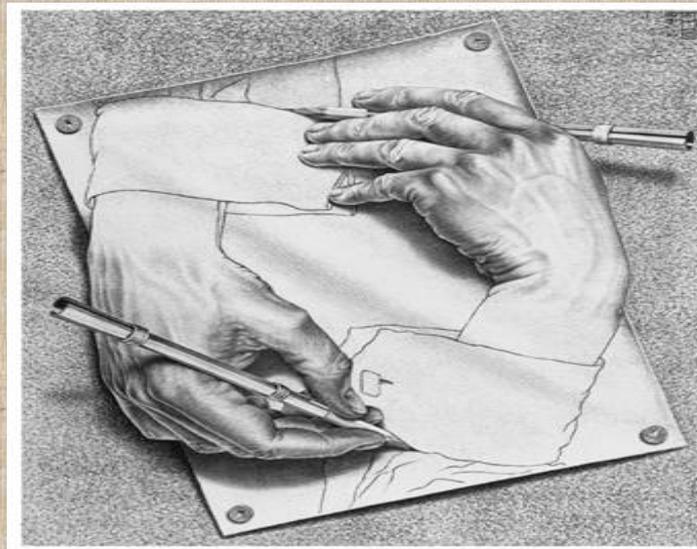
# РАБОТЫ МОРИЦА ЭШЕРА



*Водопад*



*Круговой предел*



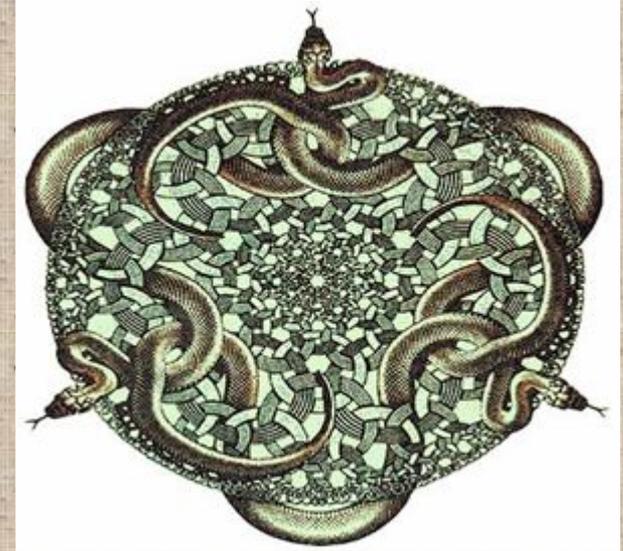
*Рисующие руки*



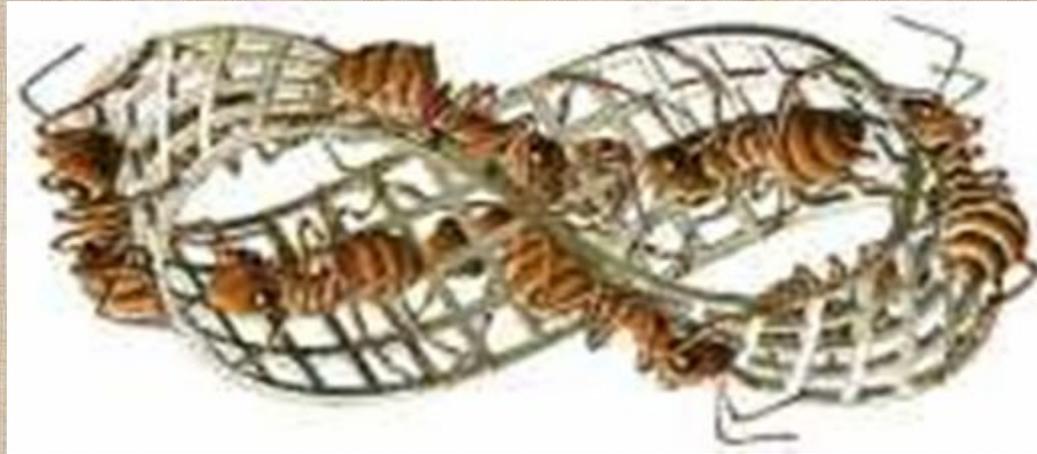
# РАБОТЫ МОРИЦА ЭШЕРА



**Встреча**



**Змеи**



**Лента Мёбиуса**

# Заключение

В 1957 году Морис Эшер о взаимосвязи математической науки со своим творчеством: «Математики открыли дверь, ведущую в другой мир, но сами войти в этот мир не решились. Их больше интересует путь, на котором стоит дверь, чем сад, лежащий за ней».

Нам остается восторгаться этим садом, идти по нему, вглядываясь в каждую картину, в каждую страницу творчества гениев, чтобы хотя бы на какие-то мгновения ощутить себя частью реальности, в которой относительность стала абсолютным принципом, и понятия направлений, граней, самого времени искривляются, стираются.



# БИБЛИОГРАФИЯ

1. Л.Ф. Пичурин «За страницами учебника геометрии». – М.: Просвещение, 1990
2. Глейзер Г.Д. Геометрия. Учебное пособие для старших классов. М., Просвещение, 1994.
3. Б. В. Болгарский «Очерки по истории математики», Минск, 1979
4. М.Я. Либман. Очерки немецкого искусства позднего средневековья и Возрождения. М. 1991.
5. Квант, №12 1990 г.
6. М. Гарднер. Математические новеллы. М., Мир, 1974

